Chapitre 5

Les fonctions usuelles

Sommaire

1 Fonctions circulaires réciproques

1.1 Fonction arcsinus

✓ **La fonction sinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique.**

✓ **Sa restriction sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction continue et strictement croissante et prend ses valeurs dans [-1,1] et donc bijective.**

✓ **Sa fonction réciproque appelée Arcsinus, et notée** arcsin, **est définie par**

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

✓ **Ainsi la fonction** arcsin **est continue et strictement croissante sur** $[-1,1]$**. De plus, on a**

$$y = \sin(x),\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longleftrightarrow x = \arcsin(y),\ \ y \in [-1,1]$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} &\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x \\ &\forall y \in [-1,1], \qquad \sin(\arcsin y) = y \end{aligned}$$

Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$**. Par exemple,**

$$\arcsin(\sin \pi) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi.$$

✓ **Comme la fonction sinus est dérivable sur** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **alors la fonction arcsinus est dérivable sur** $]-1,1[$ **et on a,** $\mathbb{S}$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ \forall x \in]-1,1[.$$

En effet, si on pose $f(x) = \sin(x)$ **alors** $\forall x \in]-1,1[$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

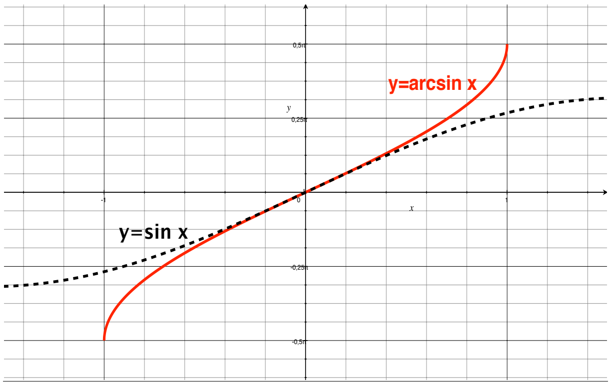
or on sait que

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$$

comme la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ **est positive sur** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **alors**

$$\Longrightarrow \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

✓ **Le graphe de Arcsinus s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de la restriction à** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **de la fonction sinus**



1.2 Fonction arccosinus

✓ **La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2π.**

✓ **Sa restriction sur $[0, \pi]$ est une fonction $\mathbb{S}$continue et strictement décroissante et prend ses valeurs sur [-1,1].**

✓ **Donc la fonction $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arccosinus et notée**

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

✓ **Ainsi la fonction $\arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.**

De plus, on a $\mathbb{S}$

$$y = \cos(x), \;\; x \in [0, \pi] \Longleftrightarrow x = \arccos(y), \;\; y \in [-1, 1]$$

Autrement dit

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [0, \pi], & \arccos(\cos x) = x \\ \forall y \in [-1, 1], & \cos(\arccos y) = y \end{array}$$

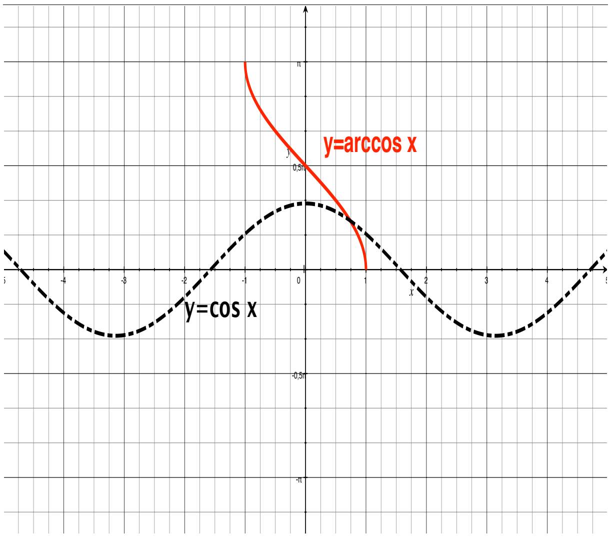
Attention, cela est valable seulement pour tout $x \in [0, \pi]$. Par exemple,

$$\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi.$$

✓ **Comme la fonction $f(x) = cos(x)$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée ne s'annulle pas sur $]0, \pi[$ alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a,**

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

✓ **Le graphe de Arccosinus s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cosinus**

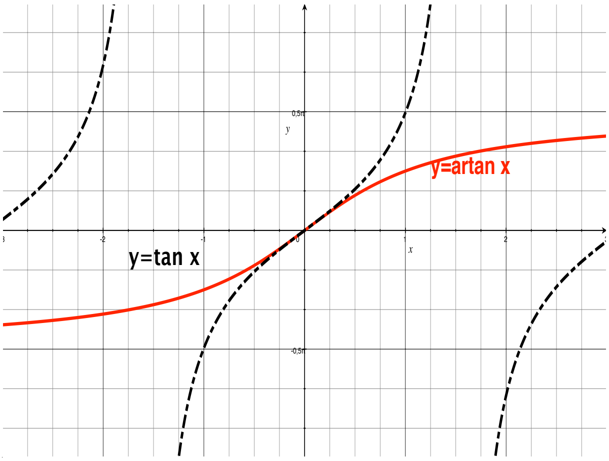


1.3 Fonction arctangente

- ✓ **La fonction tangente est définie sur** $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$**. Elle est continue, impaire et** π**-périodique.**
- ✓ **Sa restriction sur** $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ **est une fonction Scontinue et strictement croissante et prend ses valeurs sur** $\mathbb{R}$**.**
- ✓ **Donc la fonction** $\tan :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ **est bijective. On peut donc définir sa fonction réciproque appelée Arctangente et notée**
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
- ✓ **Ainsi la fonction** $\arctan$ **est continue et strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

De plus, on a
$$y = \tan(x),\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Longleftrightarrow x = \arctan(y),\ \ y \in \mathbb{R}$$
D'où pour tout $y \in \mathbb{R}$
$$\tan(\arctan y) = y.$$
et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$**,**
$$\arctan(\tan x) = x.$$

- ✓ **Comme la fonction** $f(x) = \tan(x)$ **est dérivable sur** $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ **alors sa fonction réciproque** $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ **est dérivables sur** $\mathbb{R}$ **et on a pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,**
$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



Propriété 3.

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [-1,1]; & \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi \\ \forall x \in [-1,1]; & \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \\ \forall x \in]0,+\infty[; & \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\ \forall x \in]-\infty,0[; & \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{-\pi}{2} \end{array}$$

Démonstration.. **On montre la troisième propriété, les autres se montrent de la même manière. On pose**

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$$

On a f continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ de plus

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = c$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve

$$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

2 Fonctions hyperboliques

2.1 Fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle sinus hyperbolique de x le réel noté $\sinh x$ et défini par

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle cosinus hyperbolique de x le réel noté $\cosh x$ et défini par

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- **La fonction** $\sinh$ **est impaire et la fonction** $\cosh$ **est paire. Elles sont liées par les relations :** $\forall x \in \mathbb{R}$

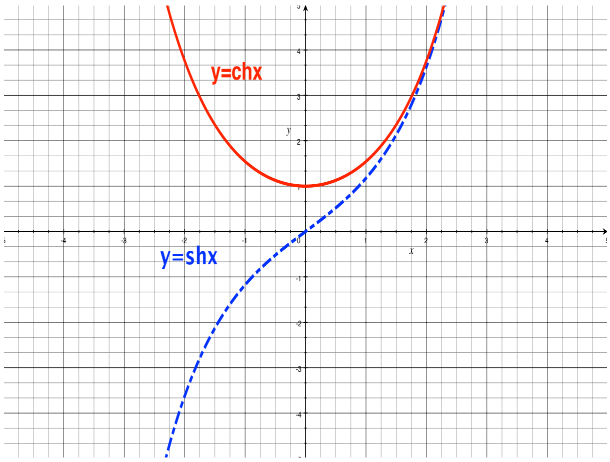
$$ch(x) + sh(x) = e^x \quad \textbf{et} \quad ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- **Les fonctions** $\cosh$ **et** $\sinh$ **sont dérivables sur** $\mathbb{R}$ **avec, pour tout** $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

- **La fonction** $\sinh$ **est impaire, strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**, strictement négative sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et strictement positive sur** $\mathbb{R}_+^*$ **et s'annule en 0.**
- **La fonction** $\cosh$ **est paire, strictement positive sur** $\mathbb{R}$**, strictement décroissante sur** $\mathbb{R}_-^*$ **et strictement croissante sur** $\mathbb{R}_+^*$ **. De plus,** $\forall x \in \mathbb{R}, chx \geq 1$**.**



2.2 La fonction tangente hyperbolique

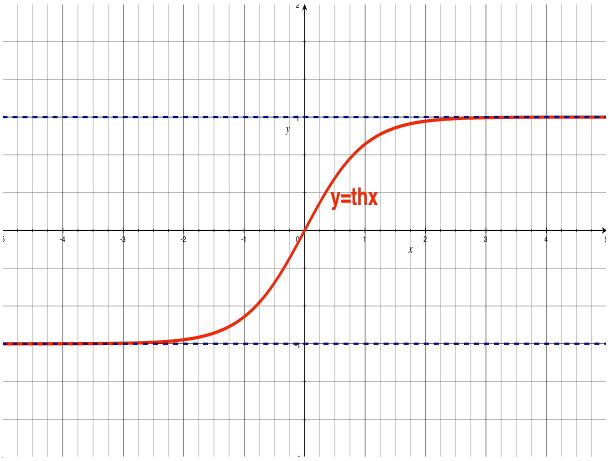
On appelle tangente hyperbolique de x **le réel noté** $\tanh x$ **ou** thx **et défini par**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La fonction th **est impaire, continue et dérivable sur** $\mathbb{R}$ **de plus on a,** $\mathbb{S}$

$$th'(x) = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, th **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **et s'annule en 0. Elle admet en** $\pm\infty$ **une asymptote horizontale d'équation** $y = \pm 1$**.**



2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$**,**

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cos x \sinh y, \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y, \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y, \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \\
\tanh(x-y) &= \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}.
\end{aligned}$$

On peut déduire que

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1, \\
\sinh(2x) &= 2\cosh x \sinh x.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh(2x)}{2} \quad \textbf{et} \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x)-1}{2}.$$

De même,

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.$$

***Démonstration.*. On va montrer la première formule. En effet, on a par définition :**

$$\sinh x \cosh y = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} + e^{x-y} - e^{y-x}}{4}$$

de même

$$\cosh x \sinh y = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)} - e^{x-y} + e^{y-x}}{4}$$

En sommant, on obtient

$$\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \sinh(x+y)$$

$\square$

Les formules ci-dessous, dites formules de changement de variables, sont trés utiles dans le calcul intégral. Si on pose $t = \tanh \frac{x}{2}$, **on a**

$$\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \textbf{et} \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

3 Fonctions hyperboliques réciproques

3.1 La fonction argument sinus hyperbolique

✓ **La fonction** $\sinh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **vers** $\mathbb{R}$. **Sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée** $\arg\sinh$. **On a donc**

$$x = \arg\sinh(y) \Longleftrightarrow y = \sinh(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

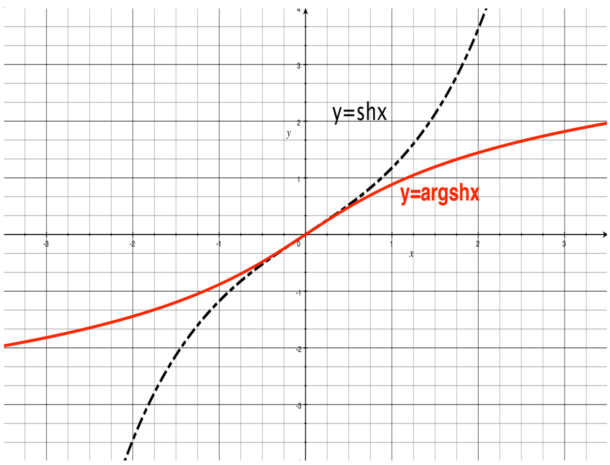
✓ **La fonction** $\sinh$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\mathbb{R}$ **alors sa fonction réciproque** $\arg\sinh x$ **est aussi dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et on a**

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

En effet, si on note $f(x) = \sinh(x)$ **alors**

$$(\arg\sinh)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)}$$

or $\cosh^2(\arg\sinh x) - \sinh^2(\arg\sinh x) = 1 \Longrightarrow \cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{1+x^2}$



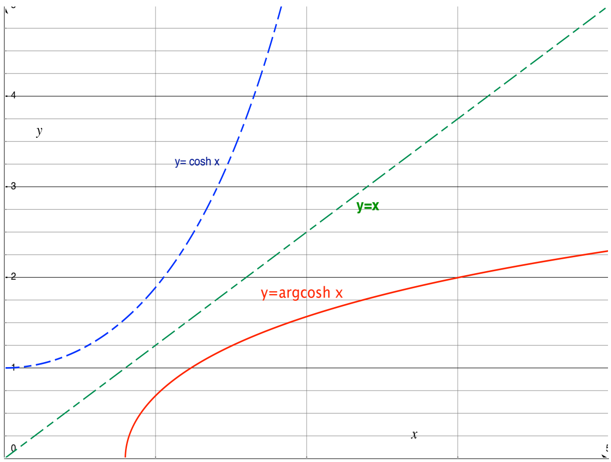
3.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

✓ **La fonction** $\cosh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $[0,+\infty[$ **vers** $[1,+\infty[$**. Sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée** $\arg\cosh$**. On a donc**

$$x = \arg\cosh(y),\ \ \forall y \in [1,+\infty[\Longleftrightarrow y = \cosh(x), \forall x \in [0,+\infty[$$

✓ **La fonction** $\cosh$ **est dérivable sur** $[0,+\infty[$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $]0,+\infty[$**; alors sa fonction réciproque** $\arg\cosh x$ **est dérivable sur** $]1,+\infty[$ **et on a**

$$(\arg\cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \forall x \in]1,+\infty[$$



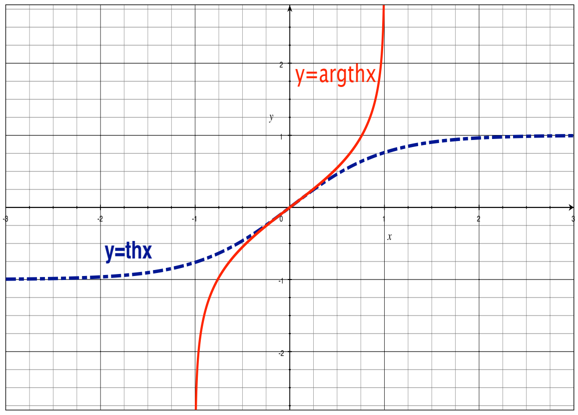
3.3 La fonction argument tangente hyperbolique

✓ **La fonction** $\tanh$ **est une fonction continue et strictement croissante donc réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **vers** $]-1,1[$**. Sa bijection réciproque, appelée argument tangente hyperbolique et notée** $\arg\tanh$**. On a donc**

$$x = \arg\tanh(y),\ \ \forall y \in]-1,1[\Longleftrightarrow y = \tanh(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

✓ **La fonction** $\tanh$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et sa dérivée ne s'annulle pas sur** $\mathbb{R}$ **alors sa fonction réciproque** $\arg\tanh$ **est dérivable sur** $]-1,1[$ **et on a**

$$(\arg\tanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \forall x \in]-1,1[$$



3.4 Expressions logarithmiques

Les fonctions hyperboliques réciproques peuvent s'exprimer à l'aide d'expressions logarithmiques. Plus précisément, nous avons :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arg\sinh x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\arg\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arg\tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Vérifions par exemple la deuxième égalité :
Soit $x \in [1, +\infty[$**. Posons** $t = \arg\cosh x$**. On a** $x = \cosh t$ **et** $t \geq 0$**. Il en résulte que** $\sinh t = \sqrt{x^2-1}$**. Par conséquent,**

$$e^t = \cosh t + \sinh t = x + \sqrt{x^2-1} \quad \textbf{et} \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$